

CARICO LIMITE DI FONDAZIONI DIRETTE IN CONDIZIONI SISMICHE: SOLUZIONI A CONFRONTO

Alessia Vecchietti, Diego Bellavita, Manuela Cecconi, Vincenzo Pane

Dipartimento di Ingegneria, Università di Perugia

alessia.vecchietti@unipg.it, bellavita.die@libero.it, manuela.cecconi@unipg.it, vincenzo.pane@unipg.it

Sommario

Nella nota si discutono diversi metodi per la valutazione del carico limite delle fondazioni dirette in condizioni sismiche. Allo scopo di valutare l'effetto dell'interazione inerziale e cinematica sui fattori di capacità portante, sono state condotte delle analisi numeriche con il codice FLAC, i cui risultati sono messi a confronto con le soluzioni disponibili in letteratura. Si propongono infine alcune equazioni per i fattori correttivi da impiegare nella valutazione del carico limite.

1. Estensione delle formulazioni convenzionali nella valutazione del carico limite

Nelle analisi delle condizioni di stabilità di fondazioni superficiali, in condizioni statiche, si ricorre tradizionalmente alla soluzione proposta da Terzaghi (1943) con la ben nota formula trinomia:

$$q_{lim} = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma B_r N_\gamma \quad (1)$$

dove N_c , N_q ed N_γ sono i fattori di capacità portante funzione dell'angolo di attrito, ϕ' , γ e c sono il peso dell'unità di volume e la coesione del terreno, q è la tensione verticale che agisce al piano di posa della fondazione (sovraffaccia laterale stabilizzante), B_r è la larghezza della base della fondazione ridotta per ricondurre il problema, eventualmente, al caso di carico centrale. È anche ben noto che l'eq. (1) è valida in condizioni di deformazione piana, carico verticale uniformemente distribuito e, per quanto riguarda il terreno, nelle ipotesi di terreno omogeneo con comportamento rigido perfettamente plastico; tuttavia, essa è applicabile - in condizioni di verifica drenate e non drenate - a situazioni diverse da quelle previste dalle ipotesi di base mediante l'impiego di fattori correttivi (Meyerhof, 1963; Brinch-Hansen, 1970; Vesic, 1973). In presenza di sisma, numerosi studi di letteratura consentono di affermare che è ancora possibile impiegare l'eq. (1), opportunamente estesa mediante l'impiego di fattori correttivi che tengano conto, in primo luogo, dell'inclinazione del carico. Si tratta, evidentemente di un approccio semplificato ma, a fronte di comprovati studi, basati su metodi diversi, tale approccio appare perseguitabile, oltre che utile da un punto di vista applicativo, a motivo di una notevole semplicità di calcolo. Più in particolare, nell'ultimo decennio, in letteratura sono stati proposte molte soluzioni per la valutazione del carico limite di fondazioni superficiali in condizioni sismiche. In tutte le soluzioni proposte, l'azione sismica causa due effetti distinti, precisamente: un *effetto inerziale* (i), a causa delle accelerazioni in fondazione dovute all'azione delle forze d'inerzia generate nella struttura in elevazione; un *effetto cinematico* (k), a causa delle forze inerziali nel terreno provocate dall'azione sismica. Entrambi gli effetti si traducono in una riduzione del carico limite, oltre che di eventuali movimenti del terreno. Come anche suggerito dalla Normativa Italiana (DM 2008), per poter quantificare questi effetti si introducono due coefficienti sismici orizzontali, rispettivamente $k_{h,i}$ e $k_{h,k}$. I metodi proposti nella letteratura hanno quindi mantenuto la forma generale dell'equazione (1), ma si differenziano per la tipologia di approccio adottato. Alcuni si basano su soluzioni teorico-analitiche, altri derivano da risultati di studi sperimentali. I primi studi risalgono a Meyerhof (1951;

1953) e Shinohara et al. (1960). Anni dopo, e fino ad arrivare a studi recenti, diversi Autori hanno affrontato il problema mediante l'impiego dei metodi dell'equilibrio limite, nel considerare le forze inerziali dovuti al sisma nella struttura di fondazione e nel terreno, e nel quantificarne gli effetti sui tre termini che compaiono nella formula trinomia del carico limite (eq.1). In questi approcci, diverse sono le assunzioni riguardanti la forma delle superfici di scorrimento che delimitano il volume di terreno in condizioni di rottura generale (Sarma & Iossifelis, 1990; Richards *et al.*, 1993; Budhu & Al-Karni, 1993; Kumar & Kumar, 2003; Choudhury & Subba Rao, 2005; Castelli & Motta, 2011).

<i>metodo di calcolo</i>	<i>riferimento bibliografico</i>
equilibrio limite	Budhu M. & Al-Karni A. (1993) - Castelli F. & Motta E. (2011) - Choudhury D. & Subba Rao K. S. (2005) - Kumar J. & Kumar N. (2003) - Richards R. Jr., Elms D. G. e Budhu M. (1993) - Sarma S. K. & Iossifelis I. S. (1990).
analisi limite (estr. sup.)	Dormieux L. & Pecker A. (1995) - Ghosh P. (2008) - Paolucci R. & Pecker A. (1997) - Soubra A. H. (1997) - Soubra A. H. (1999) - Zhu D. (2000).
metodo delle caratteristiche	Cascone E., Carfi G., Maugeri M. and Motta E. (2004) - Cascone E., Maugeri M. e Motta E. (2006) Kumar J. & Mohan Rao V. B. K. (2002) - Maugeri M. & Castelli F. (2006) - Maugeri M. & Castelli F. (2008) - Maugeri M. & Novità D. (2004) - Shi X. & Richards R. Jr. (1995).
studi sperimentali	Maugeri M. et al. (2000) - Zeng X. & Steedman R.S. (1998).
analisi numeriche	Shafiee A. H. & Jahanandish M. (2010).

Tab. 1. Riepilogo degli studi disponibili in letteratura sul calcolo del carico limite di fondazioni superficiali in presenza di azioni sismiche.

Altre soluzioni disponibili in letteratura sono quelle derivate dai teoremi dell'analisi limite (estremo superiore), tra le quali quelle proposte da Dormieux & Pecker (1995), Paolucci & Pecker (1997), Soubra (1997; 1999), Zhu (2000), Ghosh (2008). Altre ancora, derivano dall'applicazione del metodo delle caratteristiche (Shi & Richards, 1995; Kumar & Mohan Rao, 2002; Maugeri & Novità, 2004; Maugeri & Castelli, 2006, 2008; Cascone *et al.*, 2004, 2006) e non ultimo, del metodo della zero-extension-line (Ghahramani & Berrill, 1995). Recentemente, numerosi ricercatori hanno trattato il caso della determinazione del carico limite - in condizioni sismiche - di fondazioni superficiali su pendio (ad es.: Kumar & Kumar, 2003; Farzaneh *et al.*, 2013). Meno numerosi sono invece gli studi sperimentali ad oggi disponibili in letteratura; ad eccezione dei lavori di Maugeri *et al.* (2000), Zeng e Steedman (1998), gli scriventi non sono a conoscenza di altri studi. Infine, per quanto concerne i metodi numerici, numerosi sono gli Autori che hanno impiegato i risultati di analisi numeriche di fondazioni dirette in condizioni statiche (Frydman & Burd, 1997; Majidi e Mirghasemi, 2008) mentre, apparentemente, non sono stati rinvenuti in letteratura studi analoghi in condizioni sismiche (Shafiee & Jahanandish, 2010). La Tabella 1 riassume in sintesi le soluzioni disponibili in letteratura, la tipologia di metodo adottato ed il corrispondente riferimento bibliografico.

A fronte di questa breve rassegna di letteratura, in questa nota si illustrano i risultati di analisi numeriche condotte con il codice FLAC, a confronto con alcune delle soluzioni di letteratura appena citate. Il confronto è basato sulle espressioni che definiscono i coefficienti correttivi da impiegare nella formula del carico limite in condizioni sismiche, vale a dire:

$$q_{lim} = e_{c,i} \cdot e_{c,k} \cdot cN_c + e_{q,i} \cdot e_{q,k} \cdot qN_q + e_{\gamma,i} \cdot e_{\gamma,k} \cdot \frac{1}{2}\gamma B_r N_\gamma \quad (2)$$

ove e_i ed e_k rappresentano rispettivamente i fattori correttivi relativamente all'effetto inerziale (*i*) e a quello cinematico (*k*). In alcune soluzioni proposte nella letteratura, i coefficienti e_k , e_i risultano inglobati all'interno dei coefficienti di capacità portanti in condizione sismica, N_{ce} , N_{qe} , $N_{\gamma e}$; questi ultimi sono così definiti:

$$N_{ce} = e_{c,i} e_{c,k} \cdot N_{ce}; \quad N_{qe} = e_{q,i} e_{q,k} \cdot N_q; \quad N_{\gamma e} = e_{\gamma,i} e_{\gamma,k} \cdot N_\gamma \quad (3)$$

2. Analisi numeriche con il codice FLAC

Ai fini della validazione dei coefficienti correttivi da introdurre nell'espressione del carico limite (eq. 2), sono state condotte analisi numeriche pseudo-statiche attraverso il codice alle differenze finite FLAC v. 7.0. Nelle analisi in condizioni di deformazione piana, il terreno è modellato come mezzo rigido-plastico, con criterio di rottura di Mohr-Coulomb. Tutte le analisi sono state condotte assumendo per il terreno i seguenti valori delle proprietà fisico-meccaniche:

$$\gamma = 20 \text{ kN/m}^3 \quad \phi' = 20^\circ \div 35^\circ \quad q = 15 \text{ kPa} \quad (4)$$

Il carico in fondazione ed il sovraccarico laterale q (se presente) sono stati imposti tramite forze, eventualmente inclinate, concentrate nei nodi del dominio di calcolo. I fattori di capacità portante in condizioni sismiche, $N_{\gamma e}$, N_{qe} , N_{ce} sono stati calcolati con riferimento a tre casi e schemi di calcolo distinti:

$$1. \quad N_{\gamma e}: c' = 0, q = 0 \rightarrow q_{lim} = \frac{1}{2}\gamma B N_{\gamma e} \rightarrow N_{\gamma e} = \frac{2 \cdot q_{lim}}{\gamma B} \rightarrow e_{\gamma} = \frac{N_{\gamma e}}{N_{\gamma}} \quad (5a)$$

$$2. \quad N_{qe}: c' = 0, \gamma \sim 0 \rightarrow q_{lim} = q N_{qe} \rightarrow N_{qe} = \frac{q_{lim}}{q} \rightarrow e_q = \frac{N_{qe}}{N_q} \quad (5b)$$

$$3. \quad N_{ce}: q = 0, \gamma \sim 0 \rightarrow q_{lim} = c N_{ce} \rightarrow N_{ce} = \frac{q_{lim}}{c} \rightarrow e_c = \frac{N_{ce}}{N_c} \quad (5c)$$

Per ciascuno di questi schemi di calcolo sono stati poi esaminati n.3 sotto-casi:

- i) il carico è rappresentato da una forza verticale e la componente orizzontale dell'accelerazione pari a $k_{h,k}g$ è applicata al modello per simulare l'azione sismica;
- ii) il carico è rappresentato da una forza inclinata, la cui risultante è inclinata di un angolo pari a $\arctan(k_{h,i})$ rispetto alla verticale, e l'inerzia del sottosuolo è trascurata ($k_{h,k}=0$);
- iii) gli effetti inerziale e cinematico sono entrambi valutati nelle analisi: $k_{h,k} \neq 0$, $k_{h,i} \neq 0$.

2.1 Risultati. Effetti dell'azione sismica sul fattore di capacità portante N_{γ}

I risultati delle analisi numeriche (schema di calcolo 1), eq. 5a) sono rappresentati nella Figura 1a), in termini di fattore di capacità portante $N_{\gamma e}$, in funzione del coefficiente sismico k_h , a confronto con le soluzioni disponibili in letteratura. L'accordo con le soluzioni proposte da Paolucci & Pecker (1997) e con quelle suggerite da Cascone *et al.* (2006) è pienamente soddisfacente. Un altro modo efficace di rappresentare i risultati delle analisi è quello della Figura 2. In particolare, la Figura 2a) mostra la riduzione del coefficiente correttivo $e_{\gamma,k}$ (effetto cinematico) in funzione del rapporto normalizzato $k_{h,k}/\tan\phi'$. Similmente, l'effetto inerziale sulla struttura di fondazione è mostrato in Figura 2b). I risultati delle analisi numeriche, come atteso, perdono di significato, nei casi i cui $k_{h,k} \geq \tan\phi'$, come già osservato da Richards *et al.* (1990). Per quanto riguarda l'effetto inerziale dovuto alle forze trasmesse dalla struttura ($e_{\gamma,i}$), questo è del tutto confrontabile con il fattore correttivo per l'inclinazione dei carichi (statici) introdotto da Vesic (1973) che, diversamente dal fattore correttivo cinematico ($e_{\gamma,k}$), non è funzione dell'angolo di attrito del terreno. In presenza di forze orizzontali elevate tali che $k_{h,i} > \tan\phi'$, il meccanismo di collasso a scorrimento orizzontale prevale su quello di rottura generale per superamento del carico limite.

2.2 Effetti dell'azione sismica sul fattore di capacità portante N_q

La riduzione del fattore di capacità portante N_{qe} dovuto al sovraccarico laterale, q , è evidenziata nella Figura 1b) in cui i risultati ottenuti dalle analisi numeriche (schema di calcolo 2., eq. 5b) sono rappresentati a confronto con alcune delle soluzioni disponibili in letteratura. Inoltre, analogamente a quanto riscontrato per $N_{\gamma e}$, il coefficiente $e_{q,k}$ dipende dal rapporto non dimensionale $k_{h,k} / \tan\phi'$ (Fig. 2a). Diversamente, l'effetto inerziale è invece descritto da una funzione pressoché lineare nel campo di valori $k_{h,i} < 0.5$ (Fig. 2b).

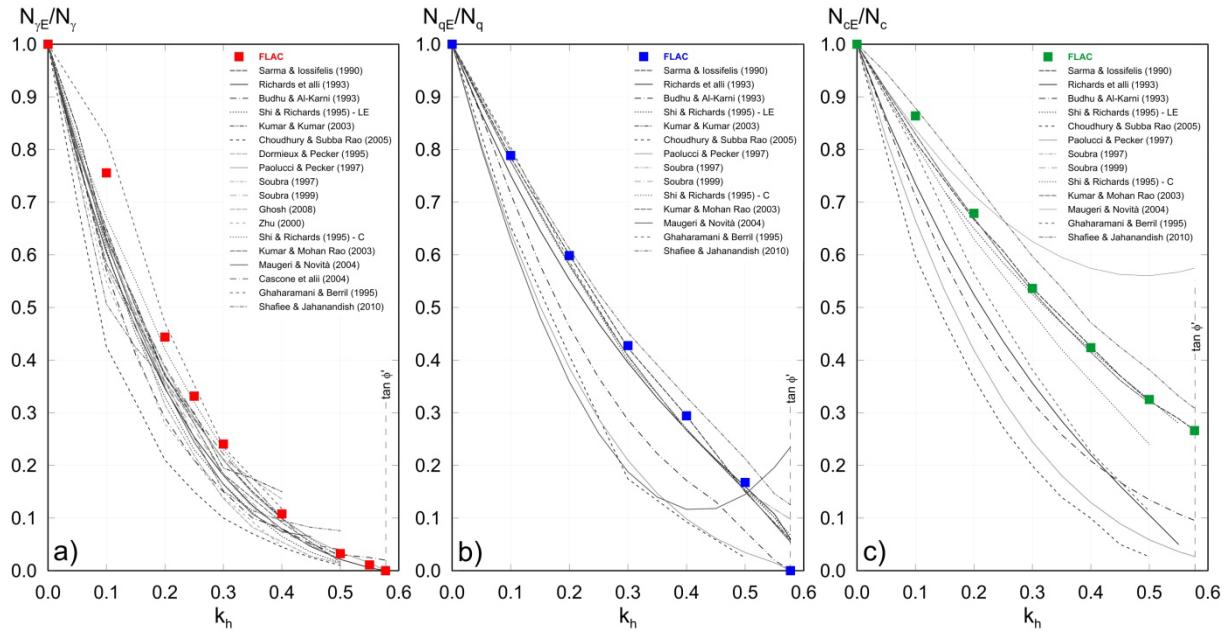


Fig. 1. Confronto dei risultati ottenuti mediante analisi numeriche FLAC con le soluzioni disponibili in letteratura ($\phi=30^\circ$): a) fattore di capacità portante $N_{\gamma e}$; b) N_{qe} ; c) N_{ce} .

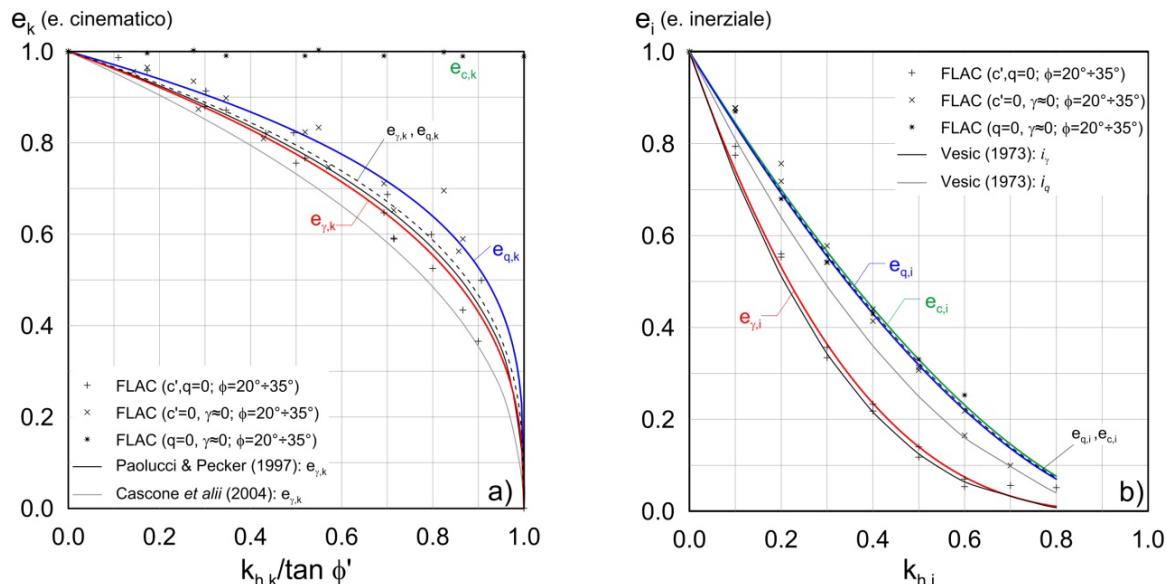


Fig. 2. Coefficienti di riduzione dei fattori di capacità portante in condizioni sismiche. a) effetto cinematico $e_{\gamma,k}$, $e_{q,k}$, $e_{c,k}$; b) effetto inerziale $e_{\gamma,i}$, $e_{q,i}$, $e_{c,i}$.

2.3 Effetti dell'azione sismica sul fattore di capacità portante N_c

In ultimo, il fattore di capacità portante N_{ce} è confrontato con le soluzioni disponibili nella Figura 1c). Come atteso, la riduzione è inferiore rispetto agli altri casi, poiché per terreni con coesione ed attrito, l'effetto cinematico è del tutto irrilevante rispetto a quello inerziale. Tale evidenza è riscontrabile anche nella Figura 2a), ove $e_{c,k}$ è costante al variare di $k_{h,k}$. In alcuni casi, si può perfino assistere ad un aumento del carico limite per elevati valori di $k_{h,k}$; questa tendenza, evidenziata anche da Shi e Richards (1995), può essere dovuta ad una progressiva “estensione” della superficie di scorrimento all'aumentare dell'accelerazione sismica.

3. Risultati ottenuti e soluzioni proposte

Sulla scorta delle evidenze della simulazione numerica, e a partire da una semplice procedura di *curve-fitting*, si propongono le equazioni per una stima dei coefficienti di riduzione dei fattori di capacità portante, da applicare ai fattori statici, N_γ , N_q , N_c . Tali equazioni derivano dall'ipotesi di sovrapposizione dei due effetti inerziale e cinematico, opportunamente validata mediante successive analisi numeriche, non riportate in questa nota per brevità. In particolare, con riferimento alle Fig. 2a), 2b), e potendo trascurare a favore di sicurezza l'effetto su N_c , è possibile definire un'unica legge di tendenza per i coefficienti $e_{\gamma,k}$, $e_{q,k}$:

$$e_{\gamma,k} \cong e_{q,k} = \left(1 - \frac{k_{h,k}}{\tan \phi'}\right)^{0.331} \quad e_{c,k} = 1 \quad (6)$$

Per quanto riguarda l'effetto inerziale, le correlazioni numeriche proposte per i tre coefficienti correttivi $e_{\gamma,i}$, $e_{q,i}$ ed $e_{c,i}$ sono definite rispettivamente dalle seguenti equazioni:

$$e_{\gamma,i} = (1 - k_{h,i})^{2.834} \quad e_{q,i} = e_{c,i} = (1 - k_{h,i})^{1.629} \quad (7)$$

Da quanto osservato (Figura 2) e dalle eq. 6) e 7) emerge chiaramente che l'effetto inerziale è certamente prevalente rispetto a quello cinematico. A tal proposito, la Figura 3 mostra la *curva-soglia* che separa i casi in cui l'effetto inerziale risulta essere predominante (o meno) su quello cinematico.

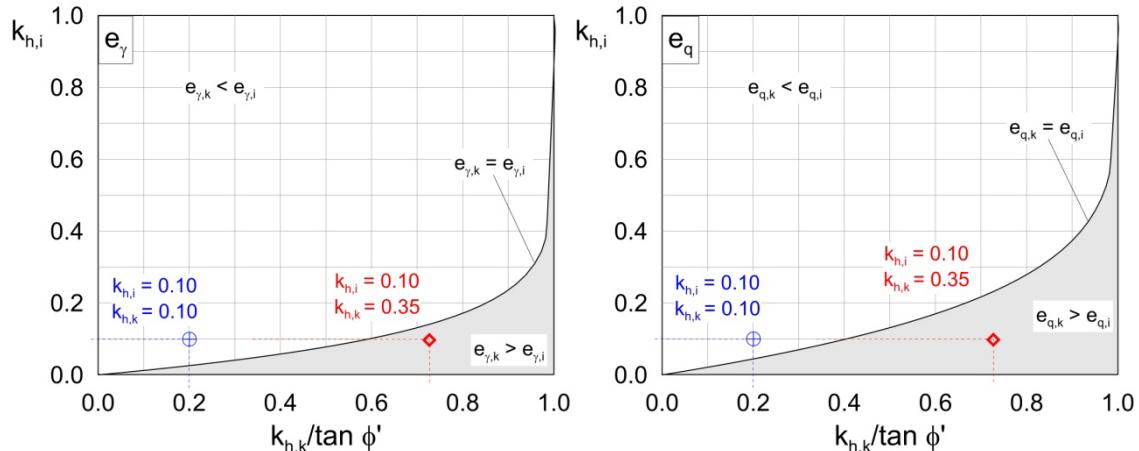


Fig. 3. Confronto tra effetto cinematico ed effetto inerziale per i fattori di capacità portante N_γ ed N_q .

Per chiarire quest'ultimo punto si consideri un semplice esempio numerico di una fondazione superficiale di larghezza $B = 3\text{m}$ ($L \gg B$) e spessore $D = 1\text{m}$ ($q = 18\text{kPa}$), realizzata in terreni con attrito e coesione ($\gamma = 18\text{kN/m}^3$, $\phi' = 26^\circ$, $c' = 8\text{kPa}$). Il coefficiente sismico orizzontale è $k_{h,k} = 0.1$. Nell'ipotesi che l'inclinazione della risultante dei carichi applicati sia tale da risultare in uno stesso valore di $k_{h,i} = k_{h,k} = 0.1$, dall'applicazione delle eq. 2), 6), 7) si ricava $q_{lim,e} = 543\text{kPa}$; se si trascura l'effetto cinematico ($e_{\gamma,k} = e_{q,k} = e_{c,k} = 1$), il carico limite risulta pari a 573kPa , conducendo quindi ad una stima meno cautelativa, seppure l'effetto cinematico risulti modesto. Il caso esaminato è riportato in Figura 3 (simbolo in blu); i punti ricadono al di sopra della curva-soglia evidenziando il maggiore effetto inerziale rispetto a quello cinematico. Diversamente, si considerino due valori distinti del coefficiente sismico orizzontale, k_h , in particolare $k_{h,i} = 0.1$ e $k_{h,k} = 0.35$, rappresentati in Figura 3 con il simbolo in rosso. La condizione $k_{h,k} > k_{h,i}$ è senz'altro realistica, essendo i valori di $k_{h,i}$ ottenibili in relazione all'input sismico, ma anche funzione delle caratteristiche della struttura in elevazione. Il carico limite (eq. 2, 6, 7) in condizioni sismiche vale $q_{lim,e} = 428\text{kPa}$; in questo caso, trascurare l'effetto cinematico condurrebbe a valutare un carico limite di 573kPa , con una sostanziale sovrastima.

Bibliografia

- Budhu, M., & Al-Karni, A. (1993). Seismic bearing capacity of soils. *Géotechnique*, 43(1), 181-187.
- Cascone E., Carfi G., Maugeri M., and Motta E. (2004). Effetto dell'inerzia del terreno sul fattore di capacità portante N_y . Atti dell'Incontro Annuale dei Ricercatori di Geotecnica 2004. Trento, 7-9 Luglio 2004.
- Cascone E., Maugeri M., and Motta E. (2006) Effetto dell'azione sismica sulla valutazione del fattore N_y . V Convegno Nazionale dei Ricercatori di Ingegneria Geotecnica. Bari, 15-16 Settembre 2006.
- Castelli, F. & Motta, E. (2011). Effetto dell'affondamento sul fattore N_y per il calcolo del carico limite di una fondazione superficiale in condizioni sismiche, Atti ANIDIS 2011, Bari, 18-22 Settembre 2011.
- Choudhury, D. & Subba Rao, K. S. (2005). Seismic bearing capacity of shallow strip footings. *Geotechnical and Geological Engineering*, 23(4):403-418.
- Dormieux, L., & Pecker, A. (1995). Seismic bearing capacity of foundation on cohesionless soil. *Journal of Geotechnical Engineering*, 121(3):300-303.
- Farzaneh, O., Mofidi, J. and Askari, F. (2013). Seismic Bearing Capacity of Strip Footings Near Cohesive Slopes Using Lower Bound Limit Analysis. 18th Int. Conf. on Soil Mechanics and Geotech. Eng., Paris.
- Frydman, S., & Burd, H.J. (1997). Numerical studies of the bearing capacity factor N_y . *Journal of Geotechnical Engineering ASCE* 123(1): 20-29
- Ghahramani, A. & Berrill, J.B. (1995). Seismic bearing capacity factors by zero-extension line method. Pacific Conf. on EQ. Eng., pp147-156.
- Ghosh, P. (2008). Upper bound solutions of bearing capacity of strip footing by pseudo-dynamic approach. *Acta Geotechnica*, 3(2), 115-123.
- Hansen, J.B. (1970). A revised and extended formula for bearing capacity. *Geoteknisk Inst.*, Bulletin 28, 5-11.
- Kumar, J. & Mohan Rao, V.B.K. (2002). Seismic bearing capacity factors for spread foundations. *Géotechnique* 52(2):79-88.
- Kumar, J., & Kumar, N. (2003). Seismic bearing capacity of rough footings on slopes using limit equilibrium. *Géotechnique*, 53(3): 363-369.
- Majidi, A.R. & Mirghasemi, A.A. (2008). Seismic 3D bearing capacity analysis of shallow foundations. *Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B, Engineering*, Vol. 32, No. B2, pp 107-124
- Maugeri, M. & Castelli, F. (2006) Analisi, modellazione e miglioramento sismico delle fondazioni di edifici esistenti. *Rivista Italiana di Geotecnica*, Ottobre – Dicembre 2006.
- Maugeri, M. & Castelli, F. (2008) Adeguamento e miglioramento sismico delle fondazioni di edifici esistenti. MIR 2008 – Opere geotecniche in condizioni sismiche. Torino, pp. 207-239.
- Maugeri, M., Novità, D. (2004). Numerical model for the evaluation of the soil inertia effects on bearing capacity. Proc. 11th Int. Conf. on Soil Dynamics and Earthquake Eng. & 3rd Int. Conf. on Earthquake Geotech. Eng., vol. II, pp 750-757, Berkeley.
- Maugeri, M., Musumeci, G., Novità, D. e Taylor, C.A. (2000). Shaking table test of failure of a shallow foundation subjected to an eccentric load. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 20: 435-444
- Meyerhof, G.G. (1951). The ultimate bearing capacity of foundations. *Géotechnique*, 2(4): 301-332.
- Meyerhof, G.G. (1963). Some recent research on the bearing capacity of foundations. *Canadian Geotech. J.*, 1(1): 16-26.
- Meyerhof, G.T. (1953). The bearing capacity of foundations under eccentric and inclined loads. 3rd Int. Conf. on Soil Mech. Zurich.
- Paolucci, R., & Pecker, A. (1997). Seismic bearing capacity of shallow strip foundations on dry soils. *Soils and Foundations*, 37(3):95-105.
- Richards, R.Jr., Elms, D.G., and Budhu, M. (1993). Seismic bearing capacity and settlements of foundations. *Journal of Geotechnical Engineering*, 119(4), 662-674.
- Sarma, S.K., & Iossifelis, I.S. (1990). Seismic bearing capacity factors of shallow strip footings. *Géotechnique*, 40(2):265-273.
- Shafiee, A.H. & Jahanandish M. (2010) Seismic bearing capacity factors for strip footings. 5th National Congress on Civil Engineering, Mashhad, 4-6 May, Iran.
- Shi, X. & Richards, R.Jr. (1995). Seismic bearing capacity with variable shear transfer. *Bullettin of the New Zealand National Society for earthquake Engineering*, Vol. 28, No. 2, 153-163.
- Shinohara, T., Tateishi, T. and Kubo, K. (1960). Bearing Capacity of Sandy Soil for Eccentric and Inclined Load and Lateral Resistance of Single Piles Embedded in Sandy Soil. 2nd World Conf. on Earthquake Eng., Tokyo.
- Soubra, A.H. (1997). Seismic bearing capacity of shallow strip footings in seismic conditions. Proc. of the Institution of Civil Engineers: Geotechnical Engineering, 125 (4): 230-241.
- Soubra, A.H.(1999). Upper-bound solutions for bearing capacity of foundations. *J. Geotech. Geoenviron.*125(1): 59-68.
- Terzaghi, K. (1943). *Theoretical Soil Mechanics*. John Wiley & Sons. New York.
- Vesic, A.S. (1973). Analysis of ultimate loads of shallow foundations. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 99(sm1), pp 43-73.
- Zeng X. & Steedman R.S.(1998) Bearing capacity failure of shallow foundations in earthquakes. *Géotechnique* 48(2): 235-256.
- Zhu, D.(2000).The least upper-bound solutions for bearing capacity factor N_y .*Soils and Found.*, 40(1):123-129.