

UNA STRUTTURA COSTITUTIVA GERARCHICA PER LA MODELLAZIONE ELASTOPLASTICA DEI GEOMATERIALI

Giuseppe Mortara

DICEAM, Università Mediterranea di Reggio Calabria

giuseppe.mortara@unirc.it

Sommario

La nota illustra la definizione di un nuovo modello costitutivo elastoplastico gerarchico per i geomateriali. A tale scopo verranno definiti un nuovo criterio di plasticizzazione, una legge *stress-dilatancy* e due leggi di incrudimento. Alcuni dati sperimentali relativi ad argille e sabbie saranno utilizzati per la validazione.

1. Introduzione

La modellazione del comportamento dei terreni coesivi e attritivi viene spesso trattata in letteratura con diversi approcci che considerano argille e sabbie come due classi di materiali. Tale distinzione si traduce nella formulazione di modelli di *tipo Cam Clay* per le argille e di *tipo Mohr-Coulomb* per le sabbie. In questa nota, invece, si intende unificare alcuni concetti comuni alle argille ed alle sabbie definendo una piattaforma costitutiva gerarchica che consenta la rappresentazione dei differenti aspetti che caratterizzano i geomateriali. Tale aspetto non è importante solo dal punto di vista concettuale ma anche da quello numerico. Un modello costitutivo *unificato* dovrebbe essere in grado di rappresentare molti aspetti che caratterizzano il comportamento dei geomateriali quali elasticità non-lineare, flusso non-associato, dipendenza dalla pressione media e dall'indice dei vuoti, anisotropia inerente ed indotta, viscosità ed effetti associati ai carichi ciclici. Tutti gli effetti elencati dovrebbero essere inclusi nel modello su base gerarchica tenendo conto dei dati sperimentali disponibili per la determinazione dei parametri costitutivi. Un modello di questo tipo richiede la formulazione di superfici (di plasticizzazione e potenziali) gerarchiche e di leggi di incrudimento generalizzate. In particolare, le superfici devono essere tali da evitare la presenza di “domini elastici falsi” (Brannon e Leelavanichkul, 2010). Il modello presentato in questa nota è limitato ad un singolo meccanismo plastico, utilizza una legge iper-elastica e definisce due funzioni di incrudimento ed una legge *stress-dilatancy* gerarchica. Una trattazione più estesa del modello viene riportata in Mortara (2015).

2. Un nuovo criterio di plasticizzazione

La funzione proposta si basa sulla precedente formulazione di Mortara (2010) e viene posta nella forma

$$\Phi = q^2 - \Phi_d \Phi_c \Phi_\rho^2 \quad (1)$$

La funzione Φ è formulata in termini di invarianti q , p e θ definiti come:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad p = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \quad \theta = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{9 s_{ij} s_{jk} s_{ki}}{2 q^3} \right) \quad (2)$$

dove σ_{ij} è il tensore degli sforzi e $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij}/3$ è il corrispondente tensore deviatorico. Il prodotto $\Phi_d \Phi_c \Phi_\rho^2$ definisce la struttura gerarchica dell'equazione (1) e regola la forma della superficie nei piani meridiani e deviatorici. In particolare, Φ_d e Φ_c definiscono la forma nei piani meridiani e sono date da:

$$\Phi_d = S_p \alpha_d R_p^{n_\alpha} \quad (3)$$

$$\Phi_c = 1 - (\text{sgn } n_c) S_p R_p^{n_c} \quad (4)$$

dove

$$S_p = (1 - k_R) \operatorname{sgn} (p_t + p) - k_R \operatorname{sgn} (p - p_c) \quad (5)$$

$$R_p = (1 - k_R) \left| \frac{p_t + p}{p_t + p_c} \right| + k_R \left| \frac{p - p_c}{p_t + p_c} \right| \quad (6)$$

$$n_\alpha = [1 - \operatorname{sgn} n_c] 2n_d + \frac{n_c [1 - \operatorname{sgn} n_c + R]^{n_c}}{1 - (\operatorname{sgn} n_c) [1 - \operatorname{sgn} n_c + R]^{n_c}} \quad (7)$$

$$\alpha_d = \frac{[1 - \operatorname{sgn} n_c] + (\operatorname{sgn} n_c) R^{2-n_\alpha}}{1 - (\operatorname{sgn} n_c) [1 - \operatorname{sgn} n_c + R]^{n_c}} [S_R \eta_h (p_t + p_c)]^2 \quad (8)$$

$$R = (1 - k_R) R_h + k_R (1 - R_h) \quad (9)$$

$$S_R = 1 - (\operatorname{sgn} n_c) k_R \left(2 - \frac{1}{1 - \operatorname{sgn} n_c + R} \right) \quad (10)$$

Nelle precedenti equazioni, n_d , n_c , R_h e k_R sono parametri delle funzioni mentre η_h , p_t e p_c sono le variabili di incrudimento del modello. La forma della superficie nel piano deviatorico è governata dalla funzione Φ_ρ definita come:

$$\Phi_\rho = \Phi_\beta \Phi_\omega \quad (11)$$

dove

$$\Phi_\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \beta + 1}} \quad (12)$$

$$\Phi_\omega = \frac{2n_\omega - 1}{\cos \left[\frac{2}{3} (1 - n_\omega) \pi + \frac{\omega}{6} \right]} \quad (13)$$

$$n_\omega = \operatorname{sgn} \langle \theta - \pi/6 \rangle \quad (14)$$

$$\omega = \arccos \left[-1 + \frac{27}{2} \frac{\beta^2 (1 - \beta)^2}{(\beta^2 - \beta + 1)^3} \cos^2 (3\theta) \right] \quad (15)$$

$$\beta = \beta_c + (\beta_e - \beta_c) \left| \sin \left(\frac{3}{2} \theta \right) \right| \quad (16)$$

In accordo con la definizione dell'angolo di Lode, i valori della funzione (11) sono compresi tra 1 e $\beta \leq 1$ rispettivamente per $\theta = 0$ e $\theta = \pi/3$ (Bardet, 1990). La funzione Φ_ρ ha il limite, una volta stabiliti i valori di β_e e β_c , di mantenere una forma indipendente dal rapporto tensionale $\eta = q/p$. Al contrario, il criterio formulato da Mortara (2008, 2009)

$$\frac{\bar{I}_1^n \bar{I}_2^{\frac{3-n}{2}}}{\bar{I}_3} = \frac{(3 - \sin \phi_0)^n (3 + \sin \phi_0)^{\frac{3-n}{2}}}{(1 + \sin \phi_0) (1 - \sin \phi_0)^{\frac{1+n}{2}}} \quad (17)$$

fornisce un valore della resistenza in estensione variabile con ϕ_0 ed n . Nell'equazione (17) $\bar{I}_1 = \bar{\sigma}_{kk}$, $\bar{I}_2 = (\bar{\sigma}_{ii} \bar{\sigma}_{jj} - \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{ji})/2$, $\bar{I}_3 = \varepsilon_{ijk} \bar{\sigma}_{1i} \bar{\sigma}_{2j} \bar{\sigma}_{3k}$, $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + t \delta_{ij}$, essendo t la resistenza a trazione, ϕ_0 l'angolo di resistenza al taglio in compressione triassiale ed $n \geq 1$ un parametro di forma. L'introduzione di questa caratteristica nel criterio (1) si ottiene attraverso le seguenti funzioni

$$\beta_e = \beta_{e0} + (1 - \operatorname{sgn} \beta_{e0}) \frac{12 - k_c m_c}{12 + (4 - 2k_c) m_c} \quad m_c = \frac{\sqrt{\Phi_d \Phi_c}}{p_t + p} \quad k_c \leq 4 \quad (18)$$

$$\beta_c = (\operatorname{sgn} \beta_{e0}) \beta_{c0} + (1 - \operatorname{sgn} \beta_{e0}) \beta_e \quad (19)$$

La traccia della superficie nel piano deviatorico dipende dai parametri β_{e0} e β_{c0} quando essa non è una funzione dell'obliquità, altrimenti il solo parametro che la caratterizza è k_c . Le formulazioni di Ottosen (1977) e Bardet (1990) si ottengono assumendo $\beta_{e0} = \beta_{c0} > 0$. Per $\beta_{e0} = 0$, invece, la traccia deviatorica del nuovo criterio per $k_c = 0$ coincide con quella del criterio di Matsuoka e Nakai (1974), che si ottiene dal criterio (17) per $n = 1$; per $k_c > 0$, invece, trovato il valore di n che corrisponde alla stessa resistenza in estensione, si ha la quasi coincidenza tra i due criteri. Ad esempio, un'approssimazione del criterio di Lade e Duncan (1975) si ottiene per $k_c = 1.68$. La figura 1 mostra alcune forme particolari relative al criterio (1).

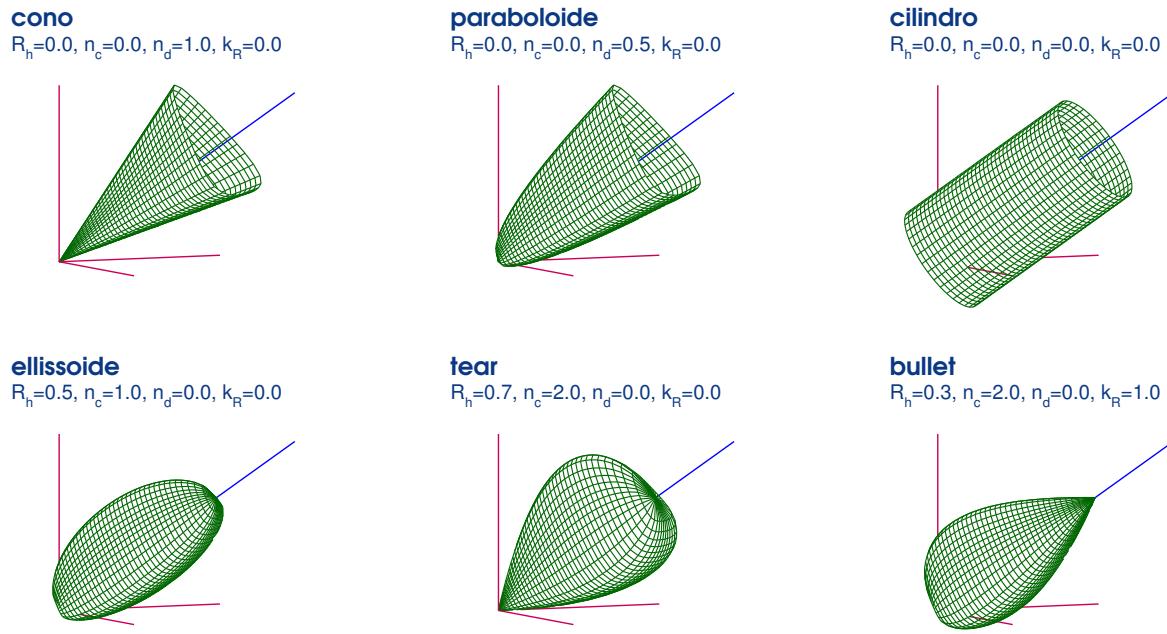


Figura 1. Casi particolari della funzione $\Phi = 0$.

3. Modello costitutivo gerarchico

In questa sezione il modello gerarchico sarà definito sull'ipotesi di superficie di plasticizzazione singola soggetta ad incrudimento isotropo. La componente reversibile delle deformazioni viene determinata sulla base del potenziale iper-elastico formulato da Houlsby et al. (2005):

$$F = p_a \frac{[k_0 (1 - n) v_0]^{\frac{2-n}{1-n}}}{k_0 (2 - n)} \quad (20)$$

$$v_0 = \sqrt{\left[\varepsilon_v^e + \frac{1}{k_0 (1 - n)} \right]^2 + \frac{3g_0}{k_0 (1 - n)} (\varepsilon_d^e)^2} \quad (21)$$

dove p_a è la pressione atmosferica e k_0 , g_0 e n sono parametri adimensionali mentre $\varepsilon_v^e = \varepsilon_{kk}^e$ e $(\varepsilon_d^e)^2 = 2e_{ij}^e e_{ij}^e / 3$ essendo $e_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^e - \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij} / 3$. La direzione delle deformazioni plastiche incrementali può essere definita a partire dal gradiente di un potenziale plastico o definendo una funzione *stress-dilatancy*. Quando la legge di flusso è non associata il secondo approccio offre una maggiore flessibilità purchè si adotti una funzione gerarchica. In questa nota viene definita la seguente funzione

$$d_0 = \frac{1 - \operatorname{sgn} b + M_g^b - \eta_0^b}{\mu_1 + \mu_2 M_g \eta_0} \quad (22)$$

dove d_0 e η_0 sono la dilatanza ed il rapporto tensionale in condizioni di compressione triassiale, e M_g , b , μ_1 e μ_2 sono parametri. La funzione (22) include come casi particolari i modelli riportati nella tabella 1. Poiché in accordo con la scelta dei parametri la superficie di plasticizzazione può essere rappresentata da una superficie aperta o chiusa, è necessario formulare due leggi di incrudimento, una per la variabile p_c ed una per la variabile η_h . Una ulteriore legge di incrudimento dovrebbe essere definita per la variabile p_t ma, non essendo presa in considerazione la degradazione meccanica della resistenza dei terreni cementati, come ad esempio nel modello di Nova et al. (2003), essa viene posta uguale a zero. La legge di incrudimento per p_c , che esprime l'equazione della linea di compressione isotropa, è rappresentata da una modifica di quella proposta da Sheng et al. (2008) che qui viene posta in forma incrementale come:

$$\dot{p}_c = (\operatorname{sgn} n_{cf}) p_a \frac{1 + e}{\langle \langle N \lambda_N \rangle \rangle} \left(\frac{p_c + p_{rN}}{p_a} \right)^{1 + \lambda_N} \frac{\lambda_N p_a}{\lambda_N p_a - c_N p_{rN}} \dot{\varepsilon}_v^p \quad (23)$$

Tabella 1. Casi particolari della *stress-dilatancy* (22)

Modello	M_g	b	μ_1	μ_2
$d_0 = c$	> 0	0	$1/c$	0
$d_0 = -c\eta_0$	$= 0$	1	$1/c$	0
sawtooth	> 0	1	1	1
Rowe (1962)	> 0	1	$1 + M_g/3$	$-2/9$
Cam-Clay originale	> 0	1	1	0
Cam-Clay modificato	> 0	2	0	$2/M_g$
Nova e Wood (1979)	> 0	1	$\neq 1$	0

$$p_{rN} = p_a \left[\frac{N}{\langle\langle e_0 \rangle\rangle} \exp \left(-c_N \frac{p_c}{p_a} \right) \right]^{-\frac{1}{\langle\langle \lambda_N \rangle\rangle}} \quad c_N < \lambda_N \left(\frac{N}{\langle\langle e_0 \rangle\rangle} \right)^{-\frac{1}{\langle\langle \lambda_N \rangle\rangle}} \quad (24)$$

dove N , λ_N e c_N sono parametri costitutivi ed e_0 è l'indice dei vuoti per $p = 0$. Se $p_{rN} = 0$, cioè se $e_0 \rightarrow \infty$, l'equazione (23) produce una linea retta nel piano $\ln e^p$, $\ln p$. In tal caso, N è l'indice dei vuoti plastico per $p = p_a$ mentre λ_N è la pendenza della retta. La legge di incrudimento per la variabile η_h in forma incrementale viene posta nella seguente forma

$$\dot{\eta}_h = a_\eta \left[1 - \left(\frac{\eta_h}{M_f} \right)^{b_\eta} \right] \exp \left[-c_\eta \left(\frac{\eta_h}{M_f} \right) \right] \left(\frac{p}{p_a} \right)^{-c_p} (e^p)^{-c_e} \dot{\varepsilon}_d^p \quad (25)$$

dove a_η , b_η , c_η , c_p e c_e sono parametri della legge mentre M_f rappresenta il valore di picco di η_h . Il softening può essere introdotto rendendo M_f dipendente dal parametro di stato ψ

$$M_f = M_{cf} \exp (-c_f \psi) \quad (26)$$

dove ψ viene definito in accordo a Been e Jefferies (1985)

$$\psi = e - e_{CS} \quad (27)$$

essendo e_{CS} è l'indice dei vuoti allo stato critico. L'introduzione del parametro di stato richiede l'adozione di una linea di stato critico che viene definita in modo analogo a quella proposta da Sheng et al. (2008)

$$e_{CS} = \Gamma \left(\frac{p + p_{r\Gamma}}{p_a} \right)^{-\lambda_\Gamma} \quad p_{r\Gamma} = p_a \left(\frac{\Gamma}{\langle\langle e_{0\Gamma} \rangle\rangle} \right)^{\frac{1}{\langle\langle \lambda_\Gamma \rangle\rangle}} \quad (28)$$

In base alla sua definizione, la linea di stato critico richiede la determinazione dei parametri Γ , $e_{0\Gamma}$ e λ_Γ . Il parametro di stato non influenza solo la variazione del massimo rapporto tensionale ma anche l'evoluzione della funzione *stress-dilatancy*: tale aspetto viene tenuto in conto introducendo una legge di evoluzione di M_g con ψ (Li, 2002):

$$M_g = M_{cg} \exp (c_g \psi) \quad (29)$$

dove M_{cg} è il rapporto tensionale allo stato critico della *stress-dilatancy*.

4. Validazione del modello

La validazione del modello si basa sul confronto tra due set di dati sperimentali e le previsioni del modello. In particolare i dati si riferiscono a prove triassiali vere drenate condotte sulla *Fujinomori clay* (Nakai et al., 1986) e prove triassiali standard non drenate condotte sulla *Toyoura sand* (Verdugo e Ishihara, 1996). In entrambi i casi (figure 2 e 3) l'accordo con i dati sperimentali risulta soddisfacente. Maggiori dettagli sulla procedura di determinazione dei parametri vengono riportati in Mortara (2015).

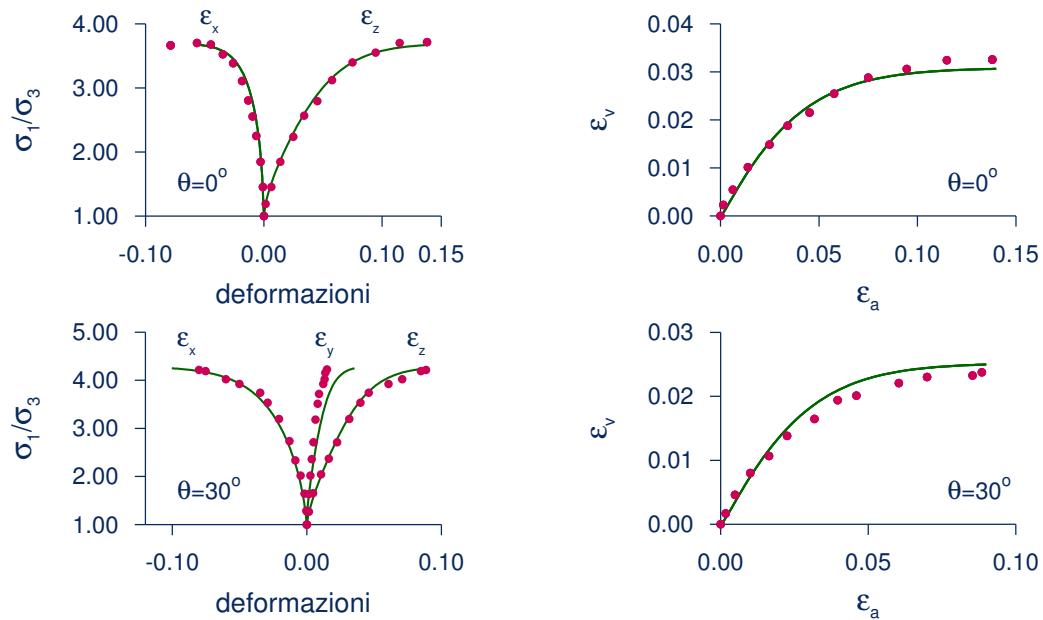


Figura 2. Simulazione di prove triassiali vere drenate sulla *Fujinomori clay* per $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 30^\circ$. Dati sperimentali da Nakai et al. (1986).

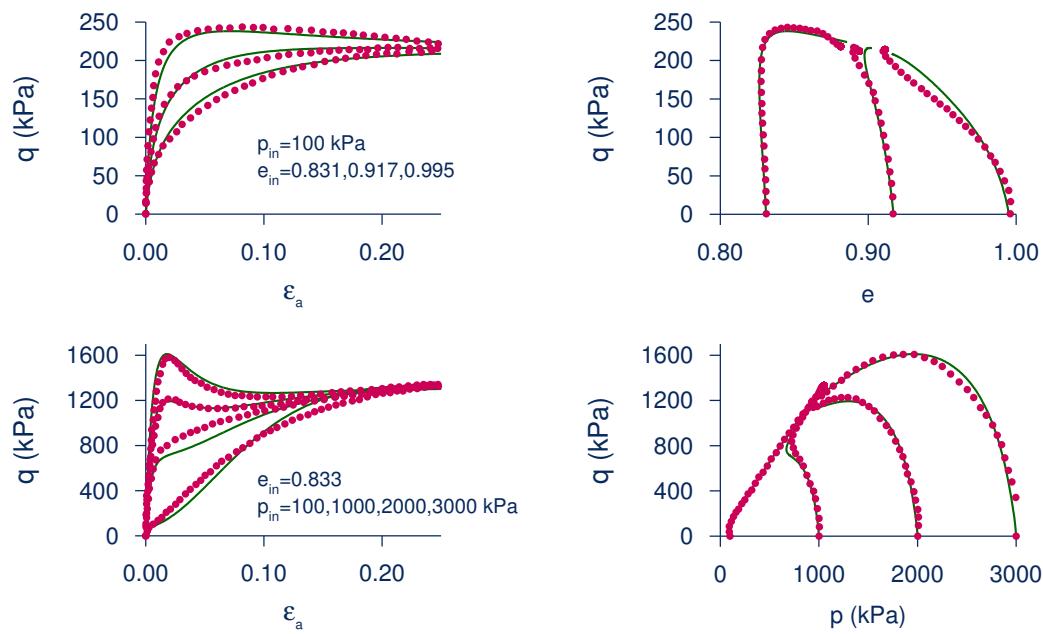


Figura 3. Simulazione di prove triassiali standard drenate e non drenate sulla *Toyoura sand*. Dati sperimentali da Verdugo e Ishihara (1996).

5. Conclusioni

La nota ha riportato la definizione di un modello costitutivo gerarchico per i geomateriali. La struttura del modello comprende: (i) una superficie gerarchica che agisce da funzione di plasticizzazione e/o da potenziale plastico, (ii) una funzione *stress-dilatancy* utilizzata in sostituzione del potenziale plastico e (iii) due leggi di incrudimento. In accordo con la scelta dei parametri il modello è in grado di rappresentare modelli di tipo Von-Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, Cam-Clay e Mohr-Coulomb esteso. Le previsioni del modello hanno rivelato un buon accordo con due set di dati sperimentali.

Bibliografia

- Bardet J.P. (1990). "Lode dependences for isotropic pressure-sensitive materials". ASME, Journal of Applied Mechanics 57, 498-506.
- Been K. e Jefferies M.G. (1985). "A state parameter for sands". Géotechnique 35, 99-112.
- Brannon R.M. e Leelavanichkul S. (2010). "A multi-stage return algorithm for solving the classical damage component of constitutive models for rocks, ceramics, and other rock-like media". International Journal of Fracture 163, 133-149.
- Houlsby G.T., Amorosi A. e Rojas E. (2005). "Elastic moduli of soils dependent on pressure: a hyperelastic formulation". Géotechnique 55, 383-392.
- Lade P.V. e Duncan M. (1975). "Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil". ASCE, Journal of the Geotechnical Engineering Division 101, 1037-1053.
- Li X.S. (2002). "A sand model with state-depend dilatancy". Géotechnique 52, 173-186.
- Matsuoka H. e Nakai T. (1974). "Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses". Proceeding Japan Society of Civil Engineers 232, 59-70.
- Mortara G. (2008). "A new yield and failure criterion for geomaterials". Géotechnique 58, 125-132.
- Mortara G. (2009). "A hierarchical single yield surface for frictional materials". Computers and Geotechnics 36, 960-967.
- Mortara G. (2010). "A yield criterion for isotropic and cross-anisotropic cohesive-frictional materials". International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 34, 953-977.
- Mortara G. (2015). "A constitutive framework for the elastoplastic modelling of geomaterials". International Journal of Solids and Structures 63, 139-152.
- Nakai T., Matsuoka H., Okuno N. e Tsuzuki K. (1986). "True triaxial tests on normally consolidated clay and analysis of the observed shear behavior using elastoplastic constitutive models". Soils and Foundations 26, 67-78.
- Nova R., Castellanza R. e Tamagnini C. (2003). "A constitutive model for bonded geomaterials subject to mechanical and/or chemical degradation". International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 27, 705-732.
- Nova R. e Wood D.M. (1979). "A constitutive model for sand in triaxial compression". International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 3, 255-278.
- Ottosen N.S. (1977). "A failure criterion for concrete". ASCE, Journal of the Mechanics Engineering Division 103, 527-535.
- Rowe P.W. (1962). "The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact". Proceedings of the Royal Society, Series A 269, 500-527.
- Sheng D., Yao Y. e Carter J.P. (2008). "A volume-stress model for sands under isotropic and critical stress states". Canadian Geotechnical Journal 45, 1639-1645.
- Verdugo R. e Ishihara K. (1996). "The steady state of sandy soils". Soils and Foundations 36, 81-91.