

SOLUZIONE A TEMPO LINEARE DI PROBLEMI MAGNETOSTATICI LARGE-SCALE CON SOLVER ALGEBRAIC MULTIGRID

⁽¹⁾Federico Moro, ⁽²⁾Lorenzo Codecasa

⁽¹⁾Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Padova

⁽²⁾Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria, Politecnico di Milano

La discretizzazione numerica di problemi elettromagnetici (EM) di interesse ingegneristico porta tipicamente a sistemi lineari sparsi large-scale con milioni di gradi di libertà (DOF). Ciò si verifica, ad esempio, quando si considerano problemi EM tridimensionali (3D) non lineari e tempo-varianti. In tal caso il costo computazionale è influenzato in larga parte dal solver, che viene spesso utilizzato iterativamente durante la simulazione EM. Pertanto, robustezza ed efficienza sono fattori che giocano un ruolo fondamentale nella scelta del solver da adottare. La discretizzazione con il metodo degli elementi finiti (FEM) o con il metodo delle celle (CM) di problemi di campo magnetostatico porta a sistemi lineari sparsi, simmetrici e definiti positivi o semi-positivi large-scale, che vengono risolti tipicamente utilizzando metodi iterativi di Krylov, quali il metodo del gradiente coniugato (PCG) o il metodo del residuo minimo generalizzato (GMRES) [1]. Per formulazioni magnetostatiche basate sul potenziale scalare (problemi div-grad) la scelta ottimale di solito consiste nell'utilizzare PCG con un preconditionatore multigrid in quanto richiede un *tempo lineare* per la soluzione, ovvero il tempo di soluzione aumenta in modo proporzionale ai DOF, e presenta, pertanto, costo computazionale ottimale [2]. I solutori *algebraic multigrid* consentono di prescindere dalla discretizzazione del modello, a differenza di quelli *geometric multigrid*, e sono più flessibili. Una implementazione di algebraic multigrid particolarmente efficiente e robusta è AGMG, sviluppato dal prof. Notay dell'Université Libre de Bruxelles [3]. Nel caso delle formulazioni basate sul potenziale vettore (problemi curl-curl) l'utilizzo di solutori multigrid per problemi div-grad è tuttavia inapplicabile. Nel 2007 i ricercatori Xu e Hiptmair dell'ETH di Zurigo [4] hanno proposto una possibile soluzione a questo problema, proponendo il preconditionatore algebraic multigrid *Auxiliary-space Maxwell Solver* (AMS), che è stato implementato nella libreria HYPRE del Lawrence Livermore National Laboratory [5]. Si è verificato tuttavia che AMS soffre di una mancanza di robustezza e mostra tempo super-lineare se applicato a sistemi lineari derivanti dalla discretizzazione di problemi magnetostatici 3D di interesse pratico (ad es. con materiali non omogenei e non lineari, parti con geometria complessa).

Tali premesse hanno motivato l'interesse in una linea di ricerca riguardante la soluzione di problemi magnetostatici large-scale, che ha visto la collaborazione delle Unità di Padova e Milano con il gruppo di analisi numerica dell'Université Libre de Bruxelles. Nell'ambito di questa collaborazione tale gruppo ha sviluppato il solver AGMG_CC per problemi curl-curl, che consente di superare le limitazioni di AMS essendo basato su AGMG [6]. Utilizzando questo solver è stato possibile proporre due diversi approcci (metodo ϕ , metodo A) per la soluzione a tempo lineare di problemi magnetostatici large-scale, che consentono di superare le limitazioni dei multigrid tradizionali in termini di robustezza ed efficienza [7]. Il metodo ϕ è formulato in termini di variabili nodali, ovvero potenziali scalari magnetici, e prevede la soluzione di un sistema lineare curl-curl per il pre-processing (calcolo delle sorgenti di campo) e di un sistema lineare div-grad. Il metodo A è formulato in termini di variabili di lato, ovvero integrali di linea del potenziale vettore magnetico, e prevede la soluzione di un

solo sistema lineare curl-curl. È stato dimostrato in [7] che i sistemi lineari precedenti possono essere risolti a tempo lineare, indipendentemente dal modello magnetostatico trattato, con solver iterativo FPCG (flexible PCG) preconditionato con AGMG, nel caso di sistemi div-grad, e preconditionato con AGMG_CC, nel caso di sistemi curl-curl.

Per validare i metodi sviluppati sono stati considerati due benchmark di interesse pratico: un attuttore cilindrico con nucleo ferromagnetico (in ipotesi di materiale isotropo non lineare), un induttore toroidale con nucleo magnetico (in ipotesi di materiale isotropo lineare). I test numerici hanno dimostrato che sia AGMG che AGMG_CC hanno tempo lineare in tutti i casi considerati, risultando al tempo stesso più veloci e robusti rispetto a solutori Krylov preconditionati con multigrid algebrici di riferimento (AMG per problemi div-grad, AMS per problemi curl-curl) oppure con il più comune metodo SOR. Ad esempio, in Figura 1 è possibile osservare come AGMG scali linearmente all'aumentare del numero di DOF, nel caso del metodo ϕ , ed impieghi metà tempo rispetto a PCG+AMG, mentre PCG+SOR è a tempo super-lineare. In Figura 2 si nota invece che solo AGMG_CC riesce a risolvere il sistema curl-curl a tempo lineare, mentre PCG+AMS non converge più se si infittisce la mesh fino a circa sei milioni di DOF. Alla luce di questi risultati si ritiene che i metodi sviluppati per la soluzione di problemi magnetostatici large-scale possano costituire una valida alternativa a quelli tipicamente adottati nei software FEM commerciali per analisi EM.

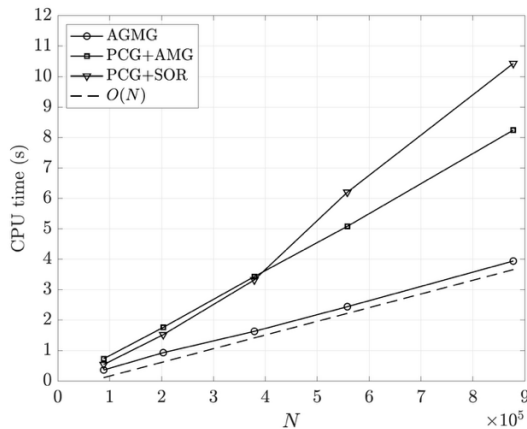


Figura 1. Tempo di CPU (s) vs. n° DOF per diverse discretizzazioni dell'induttore toroidale (metodo ϕ).

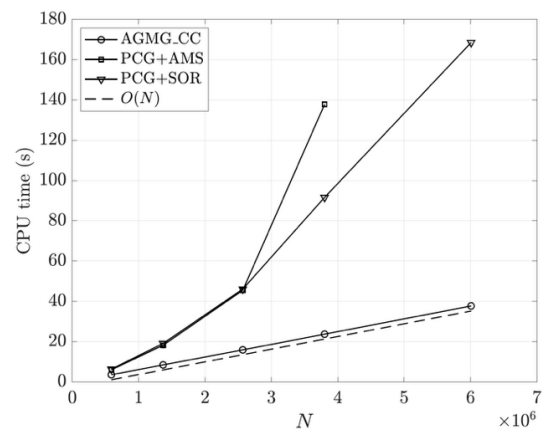


Figura 2. Tempo di CPU (s) vs. n° DOF per diverse discretizzazioni dell'induttore toroidale (metodo A).

Bibliografia

- [1] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2003.
- [2] J. Schoberl, S. Reitzinger, and M. Kaltenbacher, "Algebraic multigrid method for solving 3D nonlinear electrostatic and magnetostatic field problems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 1561–1564, Jul. 2000.
- [3] Y. Notay, "An aggregation-based algebraic multigrid method," *Electron. Trans. Numer. Anal.*, vol. 37, pp. 123–146, Oct. 2010.
- [4] R. Hiptmair and J. Xu, "Nodal auxiliary space preconditioning in $H(\text{curl})$ and $H(\text{div})$ spaces," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 45, no. 6, pp. 2483–2509, Jan. 2007.
- [5] LNL, *HYPRE: Software & Documentation*. <http://www.llnl.gov/casc/hypre/>
- [6] A. Napov, *AGMG_CC: Software & Documentation*. http://metronu.ulb.ac.be/AGMG_CC/
- [7] F. Moro, L. Codecasa, A. Napov, "Linear-Time Solution of 3D Magnetostatics with Aggregation-Based Algebraic Multigrid Solvers," *IEEE Access*, vol. 12, pp. 151693–151709, 2024.