REGOLARIZZAZIONE E PRESTAZIONI ASINTOTICHE NELLA TOMOGRAFIA DEI MATERIALI NON LINEARI

Antonello Tamburrino[1], Antonio Corbo Esposito[1], Vincenzo Mottola[1], Gianpaolo Piscitelli[2]

[1]Dipartimento di Ingegneria Elettrica e dell'Informazione «M. Scarano», Università degli Studi di Cassino e del Lazio Meridionale.
[2]Dipartimento di Scienze Economiche Giuridiche Informatiche e Motorie, Università degli Studi di Napoli Parthenope

Lo studio del comportamento elettromagnetico di materiali non-lineari è un tema di interesse in letteratura, siccome essi esibiscono caratteristiche peculiari che possono essere convenientemente sfruttate nelle applicazioni. Basti pensare ai materiali magnetici, utilizzati nella costruzione di macchine elettriche, oppure ai meta-materiali, progettati per esibire opportune non-linearità. Con il crescente impiego di questi materiali, si è affermata la domanda di metodi di tomografia non-distruttivi, in grado di ispezionare tali materiali.

Nonostante la spinta dalle applicazioni, poco finora è presente in letteratura sul tema dei problemi inversi derivanti dalle equazioni di Maxwell in presenza di materiali non-lineari; dove gli unici lavori riferiscono ad un'applicazione specifica: la ricostruzione di materiali conduttori con relazione caratteristica $J(x, E) = \theta(x)E^{p-2}$.

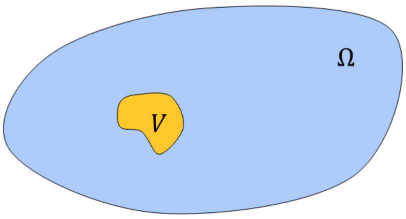
La mancanza di lavori sul tema è ascrivibile all'intrinseca difficoltà del problema. La tomografia elettromagnetica è un problema non-lineare e mal posto già in presenza di materiali lineari. Materiali non-lineari determinano una crescita esponenziale della complessità.

Recentemente, gli autori hanno introdotto un nuovo approccio alla tomografia elettromagnetica, basato sulla scoperta di un Principio di Monotonicità (MP) in presenza di materiali non-lineari [1-2]. Tale principio permette la trattazione di generiche non-linearità, sotto ipotesi molto generali, superando, quindi, uno dei principali limiti degli approcci esistenti.

Il MP non è di certo nuovo in letteratura [3], in quanto esso è alla base di un'importante classe di metodi per la tomografia di materiali lineari, in grado di garantire ricostruzioni di buona qualità, insieme alla compatibilità con applicazioni in tempo-reale, che è una caratteristica estremamente rara in questo campo.

Per questioni di chiarezza, nel proseguo, si analizzerà il problema dell'ostacolo inverso nella Tomografia a Resistenza Elettrica (ERT), in cui lo scopo è determinare posizione, dimensione e forma di un'anomalia A immersa in un materiale di fondo noto, eccitando il sistema attraverso l'applicazione di tensioni continue sul bordo e misurando le correnti risultati (vedi Figura 1).

Nella ERT, usualmente, il dato processato dagli algoritmi di ricostruzione è rappresentato dzll'operatore DtN Λ che fornisce il legame tra la tensione applicata e la corrente misurata.



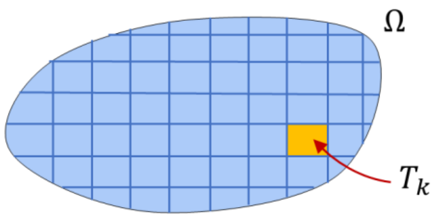


Figura 1: sinistra: problema dell'ostacolo inverso; destra: ricoprimento del dominio costituito da anomalie test

Il primo contributo fondamentale per il trattamento dei materiali non-lineari è l'introduzione di un nuovo operatore per la rappresentazione dei dati, chiamato DtN medio $\overline{\Lambda}$. Da un punto di vista fisico, se il prodotto $\langle \Lambda f, f \rangle$ (cioè il prodotto tra la tensione applicata f e la corrente misurata Λf) restituisce la potenza ohmica assorbita, il prodotto $\langle\overline{\Lambda}(f), f\rangle$ restituisce una appropriata media della potenza ohmica.

L'operatore $\overline{\Lambda}$ è di cruciale importanza, in quanto è l'unico in grado di garantire un MP tra la quantità misurata dall'esterno del dominio $\langle\overline{\Lambda}(f), f\rangle$ e la proprietà materiale incognita (conducibilità elettrica); ciò, infatti, non è possibile considerando l'operatore DtN "classico". Più nello specifico, sia $\overline{\Lambda}_A$ l'operatore DtN medio misurato in presenza dell'anomalia A di Figura 1 e sia, invece, $\overline{\Lambda}_T$ l'operatore misurato quando all'anomalia vera A viene sostituita un'anomalia test T, cioè una regione di forma e posizione nota e riempita dello stesso materiale dall'anomalia originaria. Si suppongo, che tale materiale non-lineare sia più conduttivo del materiale di fondo. Allora

$$\exists\, f \mid \langle \overline{\Lambda}_T(f), f\rangle > \langle \overline{\Lambda}_A(f), f\rangle \Longrightarrow T \nsubseteq A \tag{1}$$

La (1) fornisce uno strumento per dedurre, unicamente dalla conoscenza dei dati misurati, se una regione arbitraria T è (non) contenuta nell'anomalia originaria. Pertanto, l'anomalia può essere ricostruita a partire da un ricoprimento del dominio di partenza costituito da anomalie test (Figura 1), verificando la (1) per ognuna di esse. La (1) permette di escludere anomalie test dalla ricostruzione $\tilde{A}$, che è quindi fornita dalla rimanenti, in altre parole:

$$\tilde{A} = \bigcup \{T \mid \langle \overline{\Lambda}_T(f), f\rangle \leq \langle \overline{\Lambda}_A(f), f\rangle \; \forall f\}. \tag{2}$$

In assenza di rumore, la regola di ricostruzione (2) restituisce un insieme che coincide con l'anomalia vera a meno eventualmente di alcune delle sue cavità [5]. In altri termini, un'anomalia connessa può essere ricostruita esattamente [5].

Ovviamente, i dati reali sono sempre corrotti da rumore di misura. In [5], le prestazioni del metodo in presenza di rumore sono state caratterizzate, ed è stato possibile dimostrare la sua intrinseca stabilità rispetto al rumore di misura: in presenza di rumore l'insieme $\tilde{A}$ contiene sempre l'anomalia A; inoltre $\tilde{A}$ approccia all'anomalia vera (a meno di possibili cavità) quando il livello di rumore tende a zero.

In ultimo, il problema dell'implementazione pratica della (2) è trattato in [4], dove è mostrato

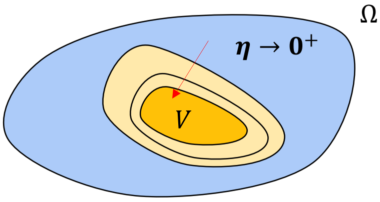


Figura 2: L'anomalia ricostruita approccia all'anomalia vera quando il livello di rumore tende a 0 (a meno di possibilità cavità eventualmente riempite)

come determinare le tensioni f necessarie a verificare la (1) in presenza di operatori non-lineari, preservando la compatibilità con il tempo reale.

Bibliografia

[1] A. Corbo Esposito, L. Faella, G. Piscitelli, R. Prakash, and A. Tamburrino, Monotonicity principle in tomography of nonlinear conducting materials, Inverse Problems, 37 (2021).
[2] A. Corbo Esposito, L. Faella, V. Mottola, G. Piscitelli, R. Prakash, and A. Tamburrino, Piecewise nonlinear materials and monotonicity principle, Inverse Problems, 40 (2024).
[3] A. Tamburrino and G. Rubinacci, A new non-iterative inversion method for electrical resistance tomography, Inverse Problems, 18 (2002).
[4] V. Mottola, A. Corbo Esposito, G. Piscitelli, and A. Tamburrino, Imaging of nonlinear materials via the monotonicity principle, Inverse Problems, 40 (2024).
[5] V. Mottola, A. Corbo Esposito, L. Faella, G. Piscitelli, R. Prakash and A. Tamburrino, The inverse obstacle problem for nonlinear inclusions. Inverse Problems, 41 (2025).